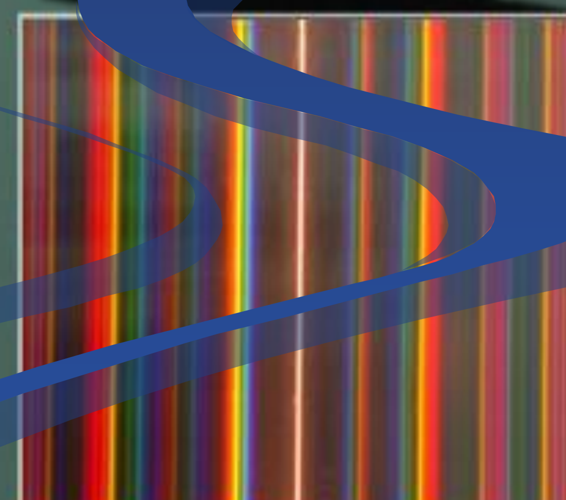
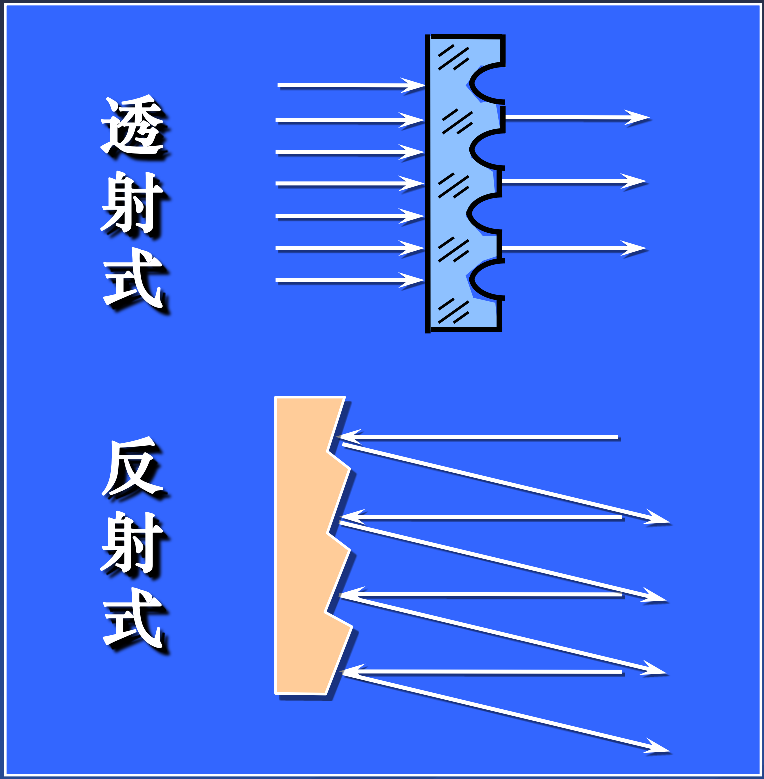
§ 11.7 衍射光栅 X射线的衍射



一、光栅的结构

光栅常数：$d = a + b$



缝数：几千条/cm

二、光栅衍射光的干涉

1. 不考虑缝宽 *a* (*b*>>*a*):

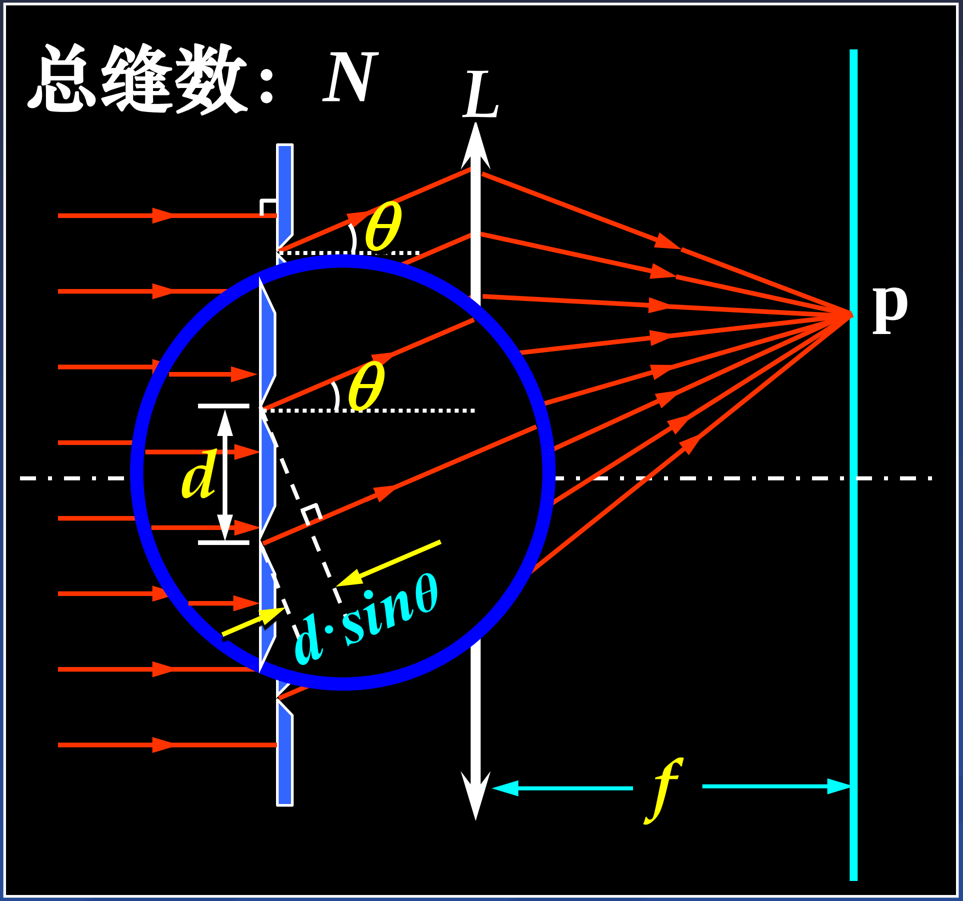
a. 明纹条件:

$$E_p = E_{1p} + E_{2p} + \cdots + E_{Np}$$

相邻两缝间:

$$\delta = d \cdot \sin\theta$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \sin\theta$$



二、光栅衍射光的干涉

1. 不考虑缝宽 *a* (*b*>>*a*):

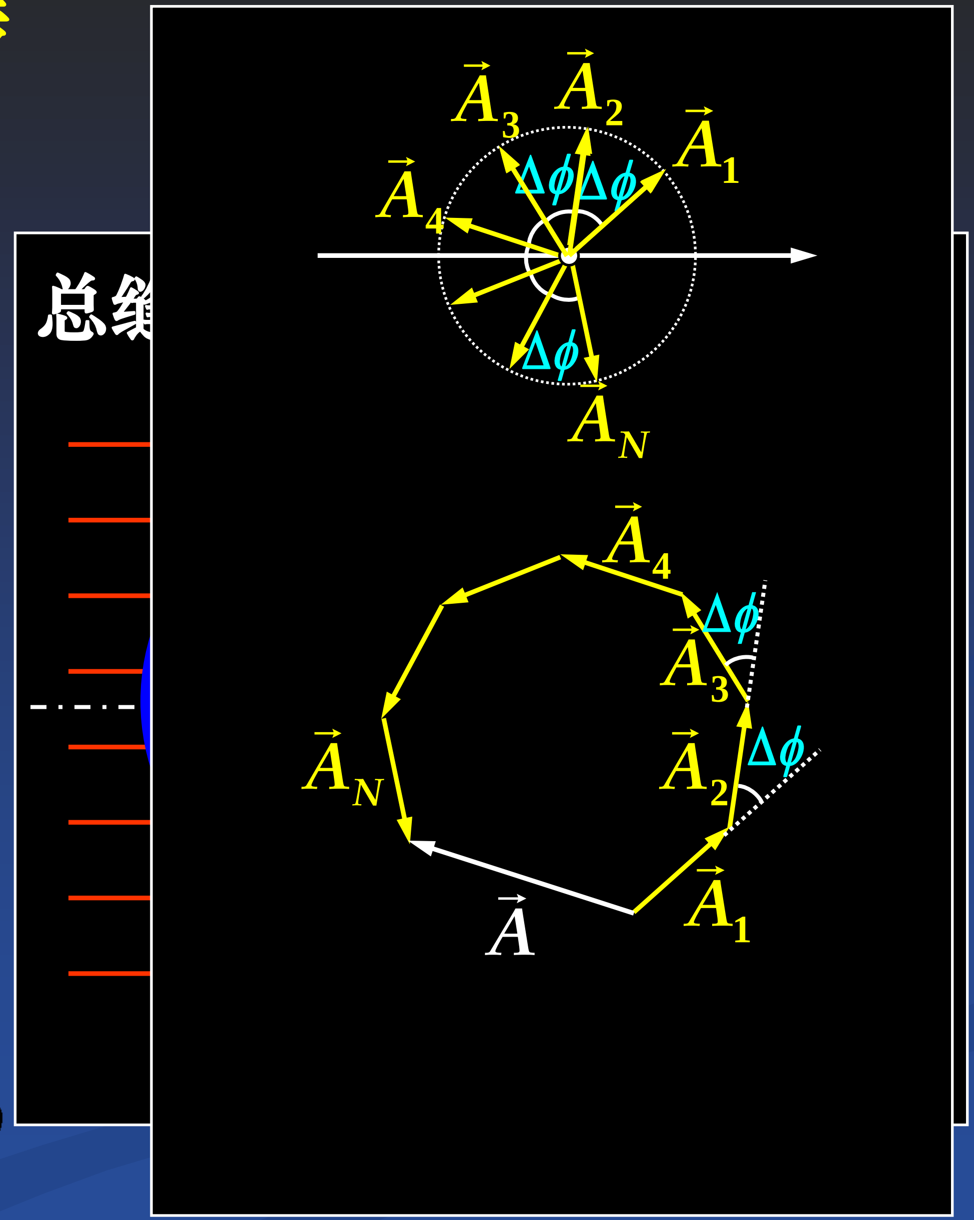
a. 明纹条件:

$$E_{\mathrm{p}} = E_{1\mathrm{p}} + E_{2\mathrm{p}} + \cdots + E_{N\mathrm{p}}$$

相邻两缝间:

$$\delta = d \cdot \sin\theta$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \sin\theta$$



当$\Delta\phi = \pm 2k\pi$时：$A = A_{max}$

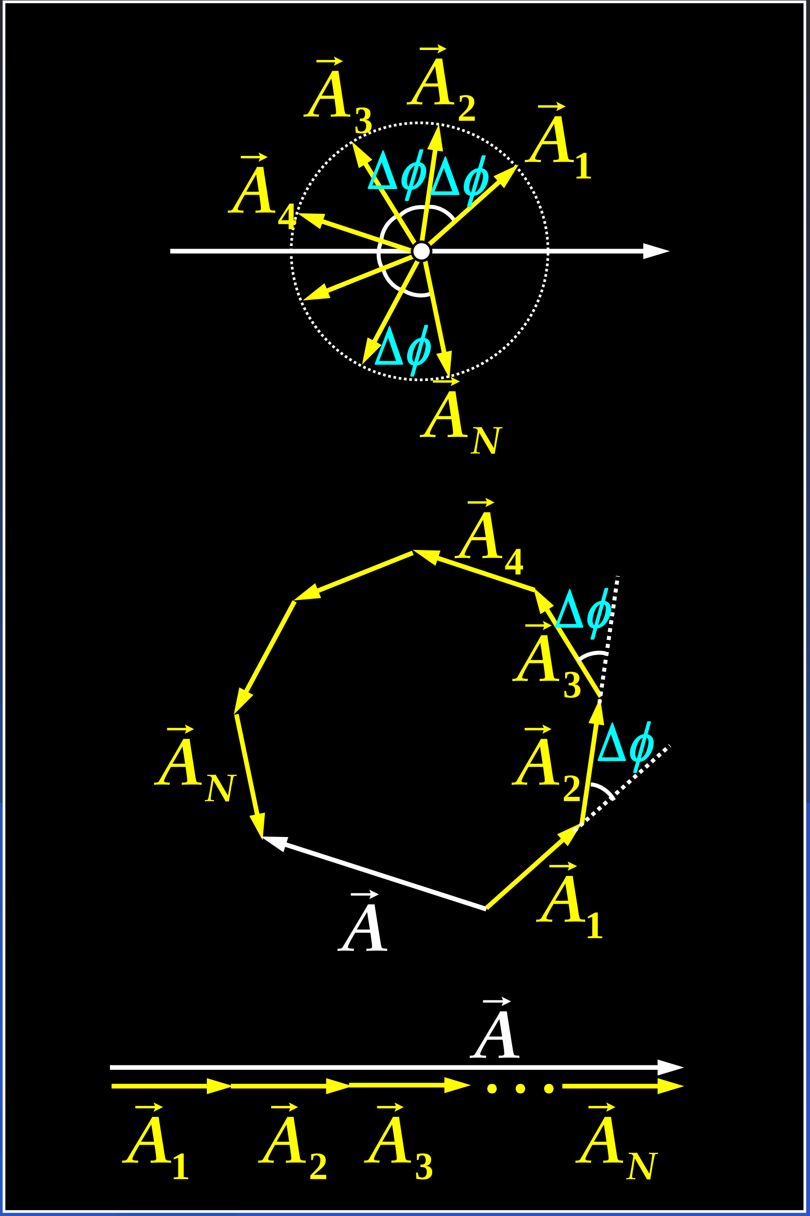
p点干涉加强，即：明

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \sin\theta = \pm 2k\pi$$

$d \cdot \sin\theta = \pm k\lambda$ 光栅方程

$$\delta = d \cdot \sin\theta$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \sin\theta$$



当$\Delta\phi = \pm 2k\pi$时：$A = A_{max}$

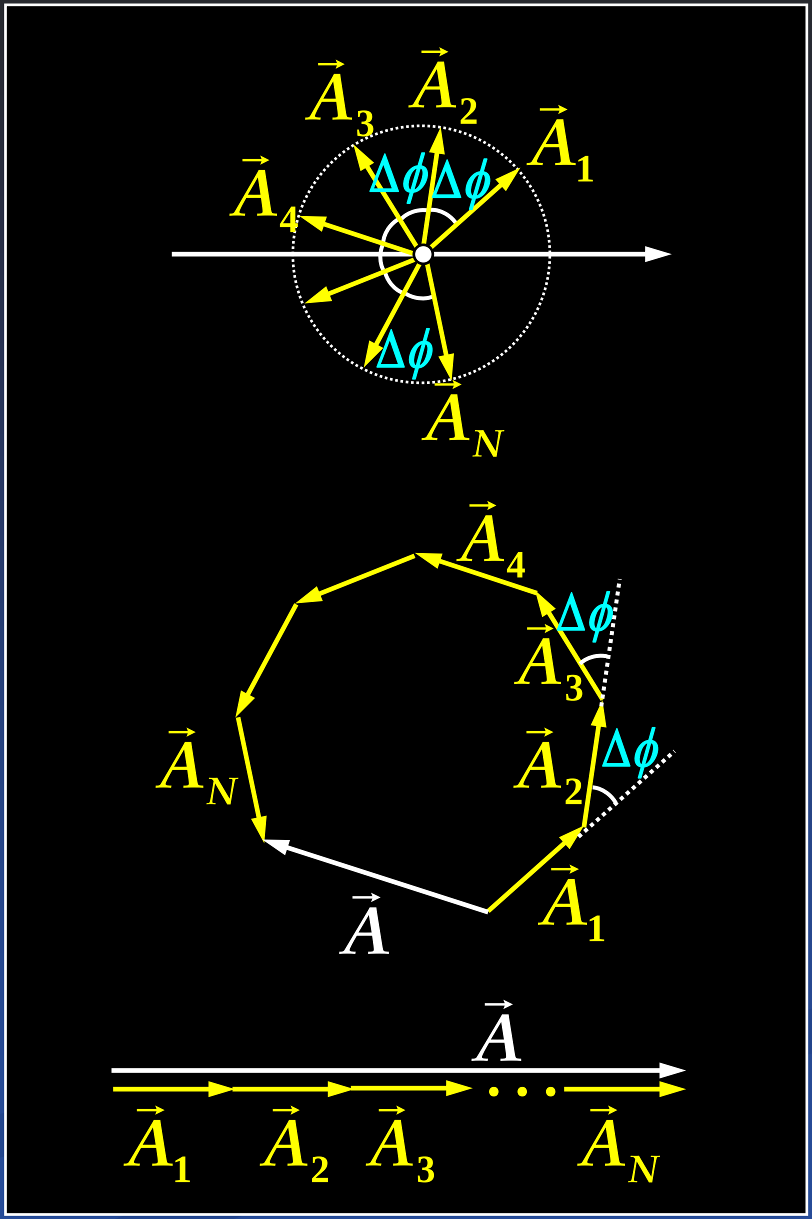
p点干涉加强，即：明

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \sin\theta = \pm 2k\pi$$

$d \cdot \sin\theta = \pm k\lambda$ 光栅方程

$(k = 0, 1, 2, \cdots)$

该方向明纹称为明纹主极大！



b. 暗纹条件:

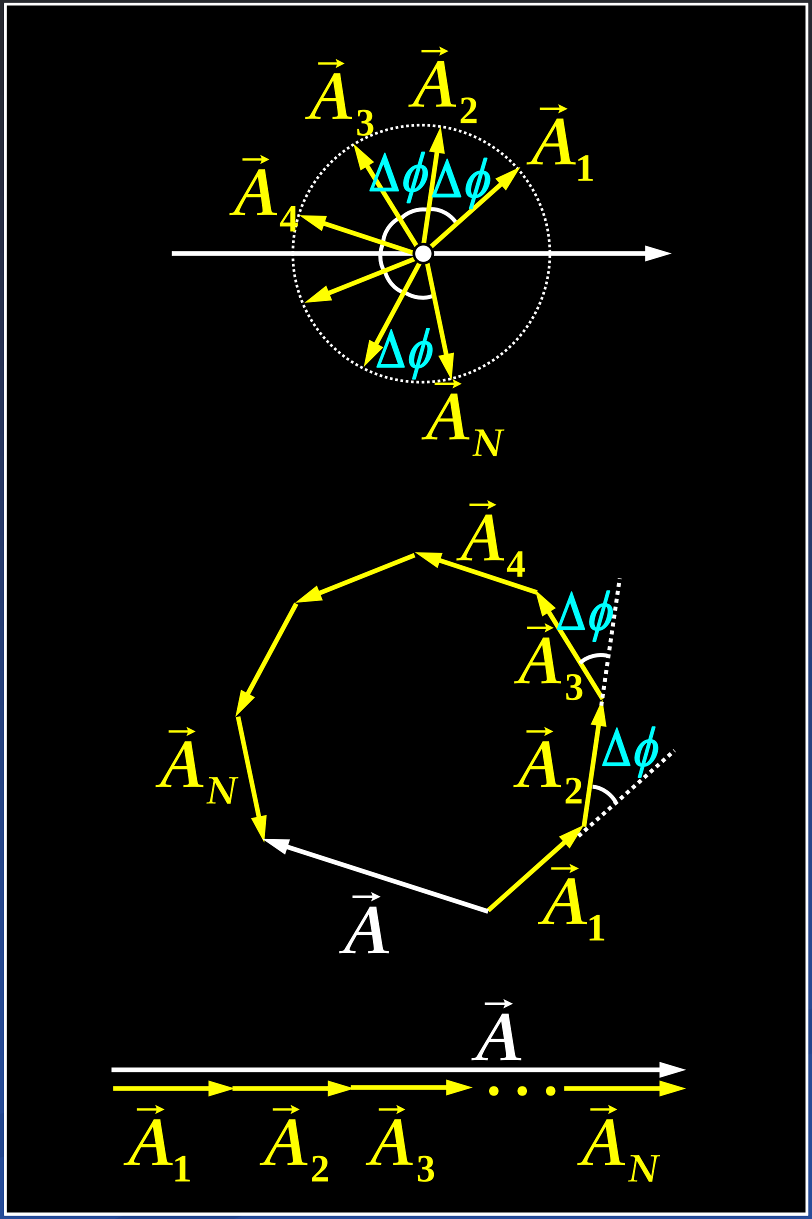
$$N\Delta\phi = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots = \pm 2m\pi$$

$$A = A_{min} = 0 \qquad I_p = 0$$

$d \cdot \sin\theta = \pm k\lambda$ 光栅方程

$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

该方向明纹称为明纹主极大!



b. 暗纹条件:

$$N\Delta\phi = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots = \pm 2m\pi$$

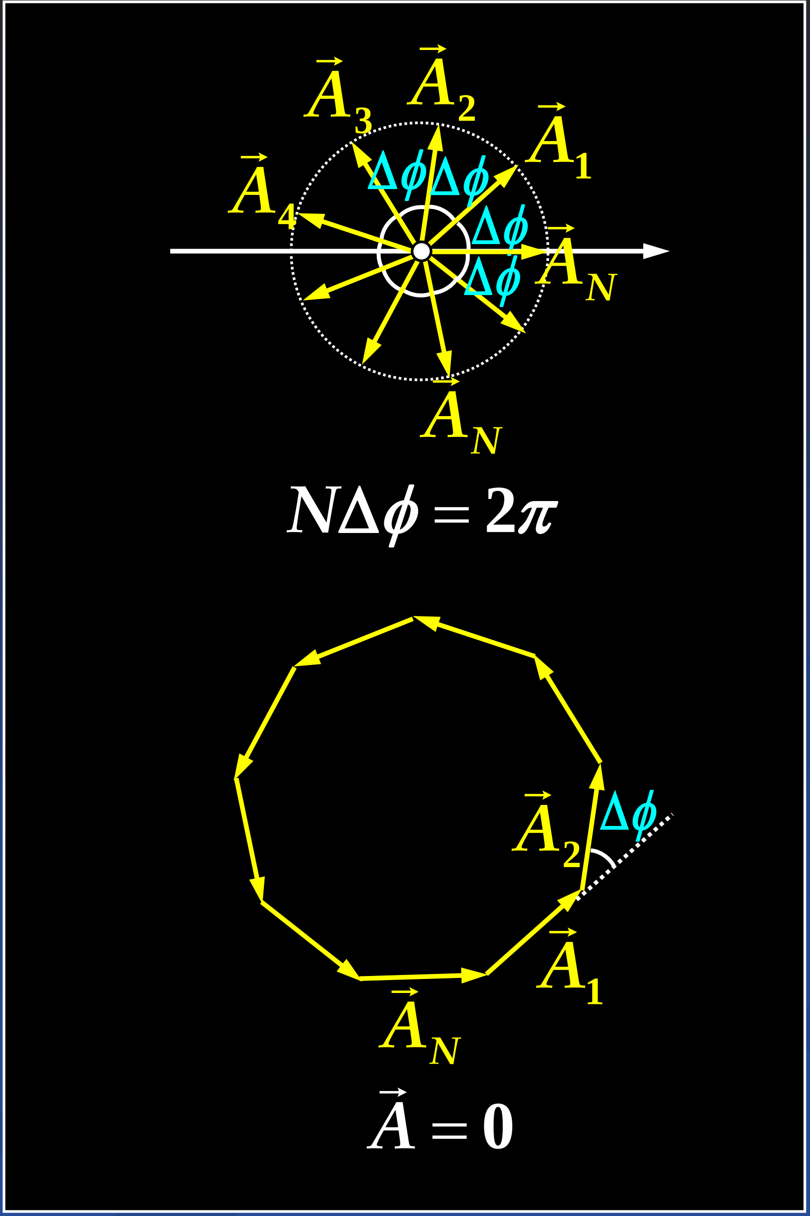
$$A = A_{min} = 0 \qquad I_p = 0$$

$$\Delta\phi = \pm\frac{2m\pi}{N} = \frac{2\pi}{\lambda} d\cdot\sin\theta$$

$$d\cdot\sin\theta = \pm\frac{m}{N}\lambda$$

$$m = 1, 2, \cdots, N-1, N+1, \cdots$$

$$(m \neq kN)$$

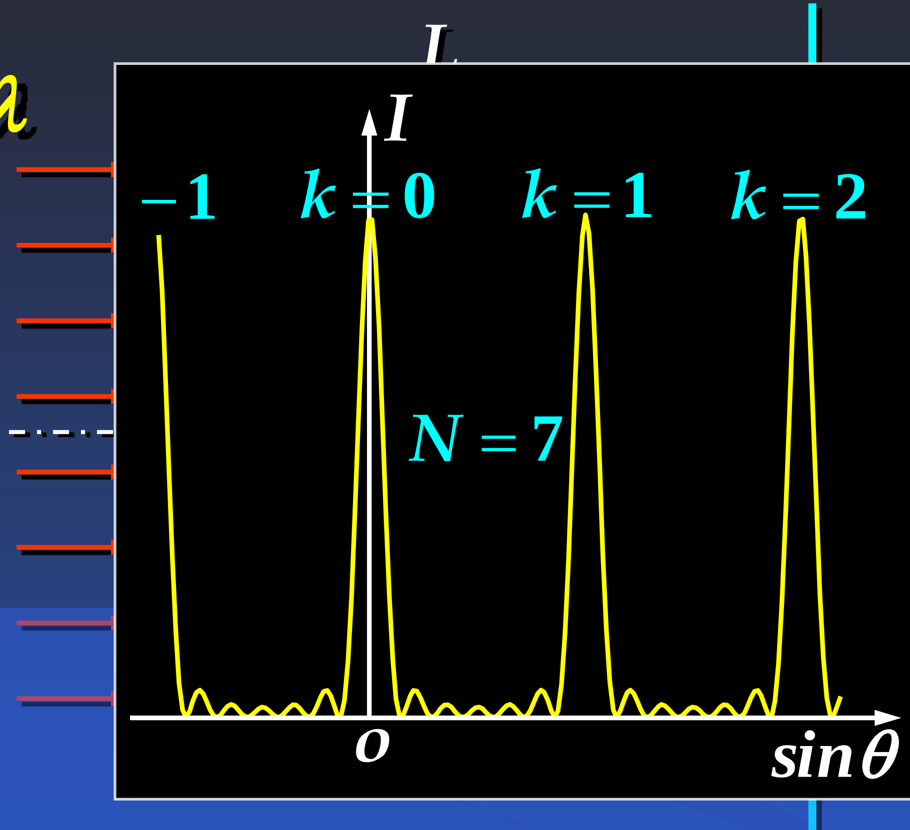


结论： 屏上干涉结果取决于 d 与 N！

明纹主极大： $d \cdot \sin\theta = \pm k\lambda$

暗纹： $d \cdot \sin\theta = \pm \dfrac{m}{N}\lambda$

$m = 1, 2, \cdots, N-1, N+1, \cdots$



$$d \cdot \sin\theta = \pm \frac{m}{N}\lambda$$

$m = 1, 2, \cdots, N-1, N+1, \cdots$

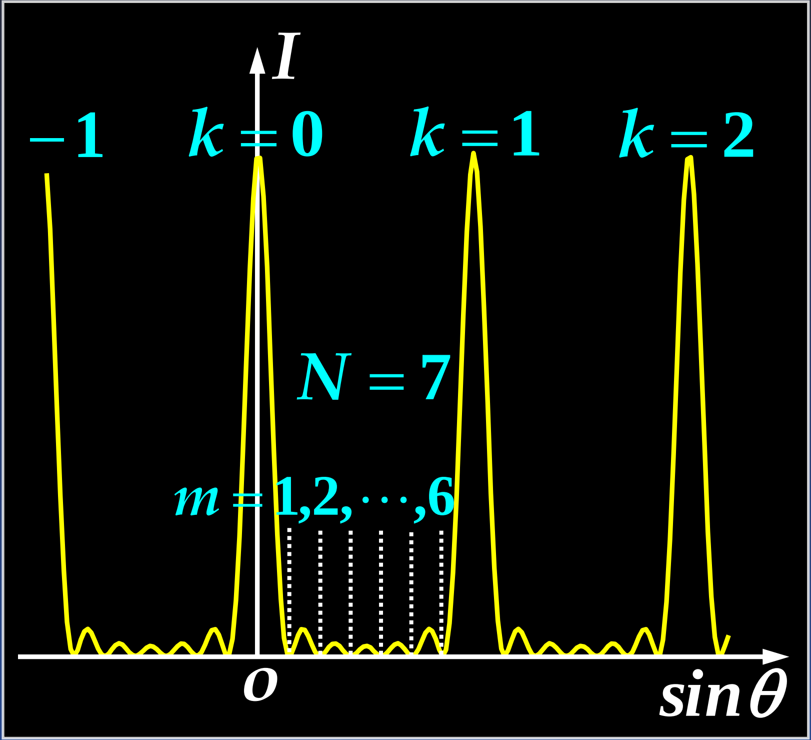
$(m \neq kN)$

结论：屏上干涉结果取决于 d 与 N ！

明纹主极大：$d\cdot\sin\theta=\pm k\lambda$

暗纹：$d\cdot\sin\theta=\pm\dfrac{m}{N}\lambda$

$m=1,2,\cdots,N-1,N+1,\cdots$

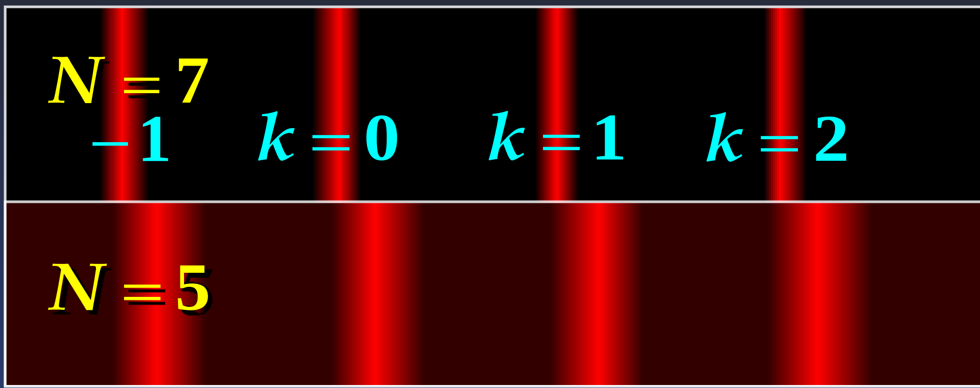


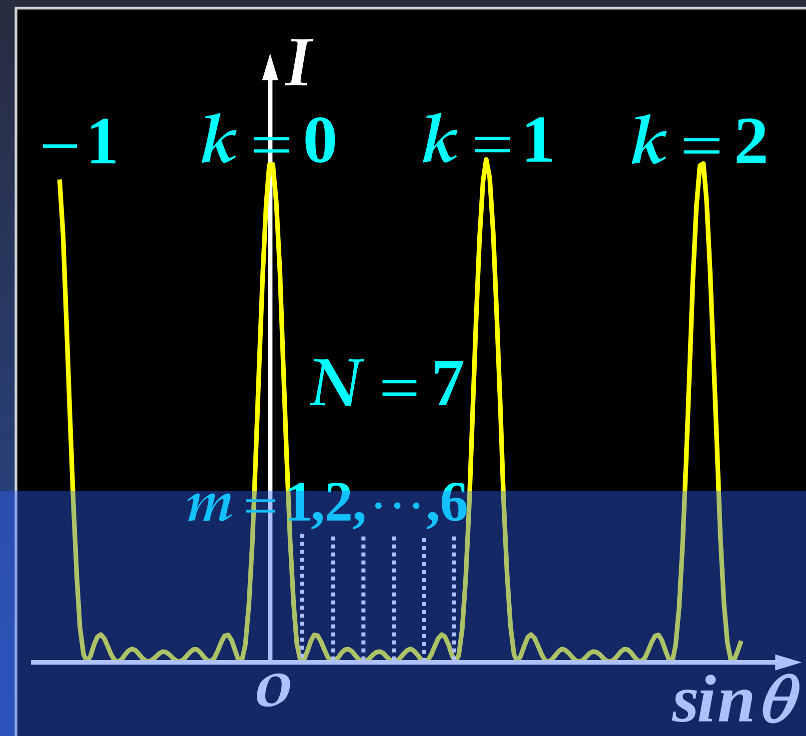
在 $0\le d\cdot\sin\theta\le\lambda$ 间，
即两明纹间：

暗纹：$d\cdot\sin\theta=\dfrac{\lambda}{N},\dfrac{2\lambda}{N},\cdots,\dfrac{N-1}{N}\lambda$

即：相邻两个主极大间共有 $N-1$ 条暗纹！

c. 条纹特点：N 较大时，背景较暗，明纹细窄、明亮！



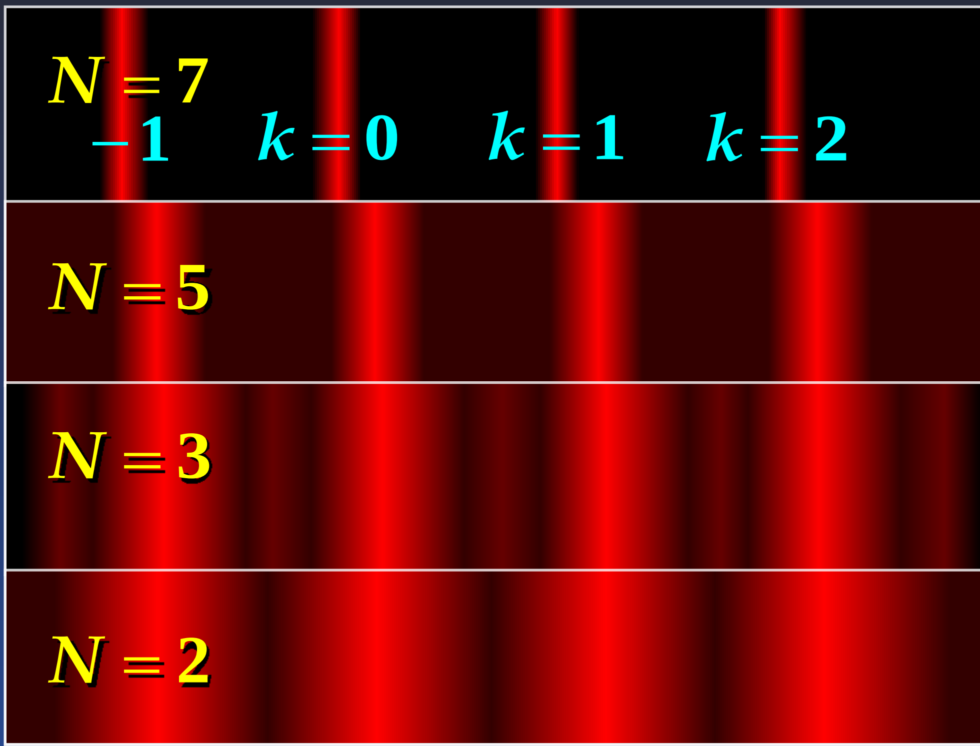


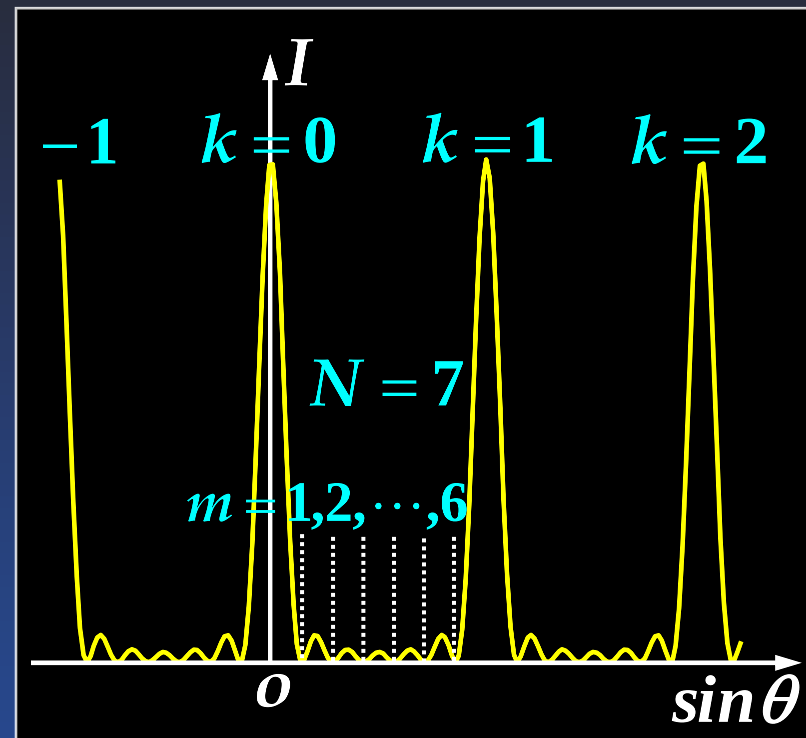
在 $0 \le d \cdot \sin\theta \le \lambda$ 间：

暗纹：$d \cdot \sin\theta = \frac{\lambda}{N}, \frac{2\lambda}{N}, \cdots, \frac{N-1}{N}\lambda$

即：相邻两个主极大间共有 $N-1$ 条暗纹！

c. 条纹特点: N 较大时，背景较暗，明纹细窄、明亮!





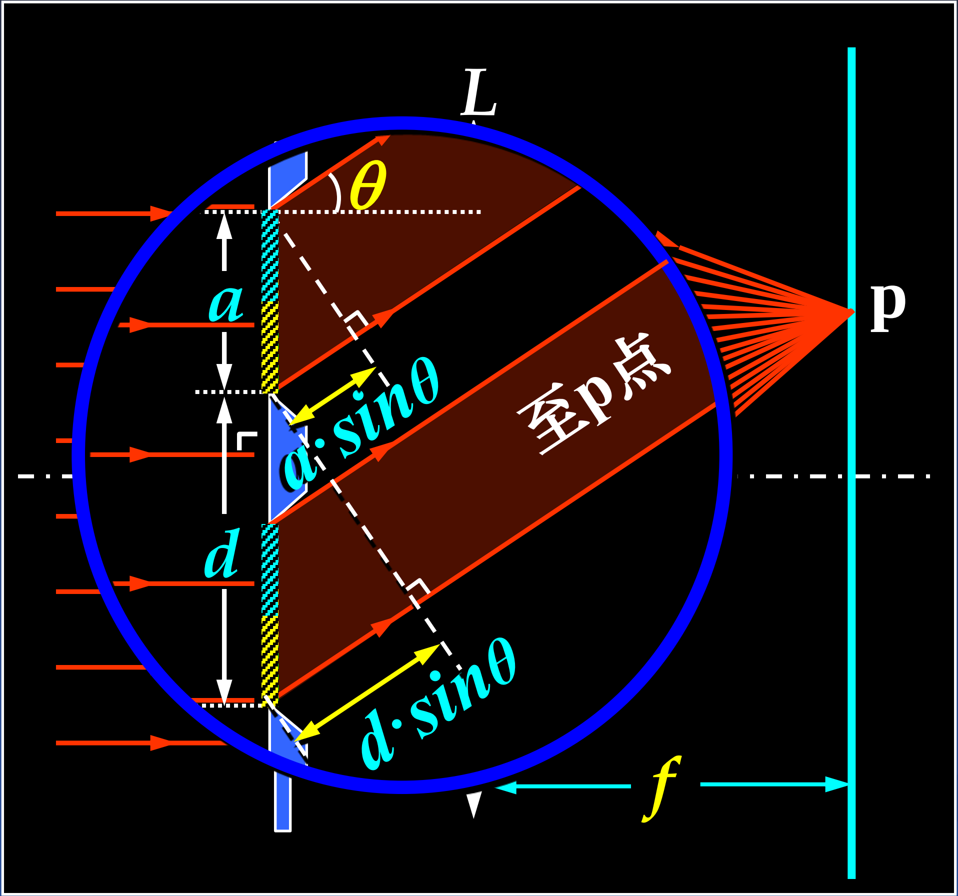
相邻两明纹主极大间共有 N-2 个次极大，光强较小!

2. 考虑缝宽 a： 设入射光垂直入射

a. 暗纹条件：

$$a \cdot \sin\theta = \pm 2k' \cdot \frac{\lambda}{2}$$

.or. $d \cdot \sin\theta = \pm(2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$



b. 明纹条件：

$$d \cdot \sin\theta = \pm k\lambda$$

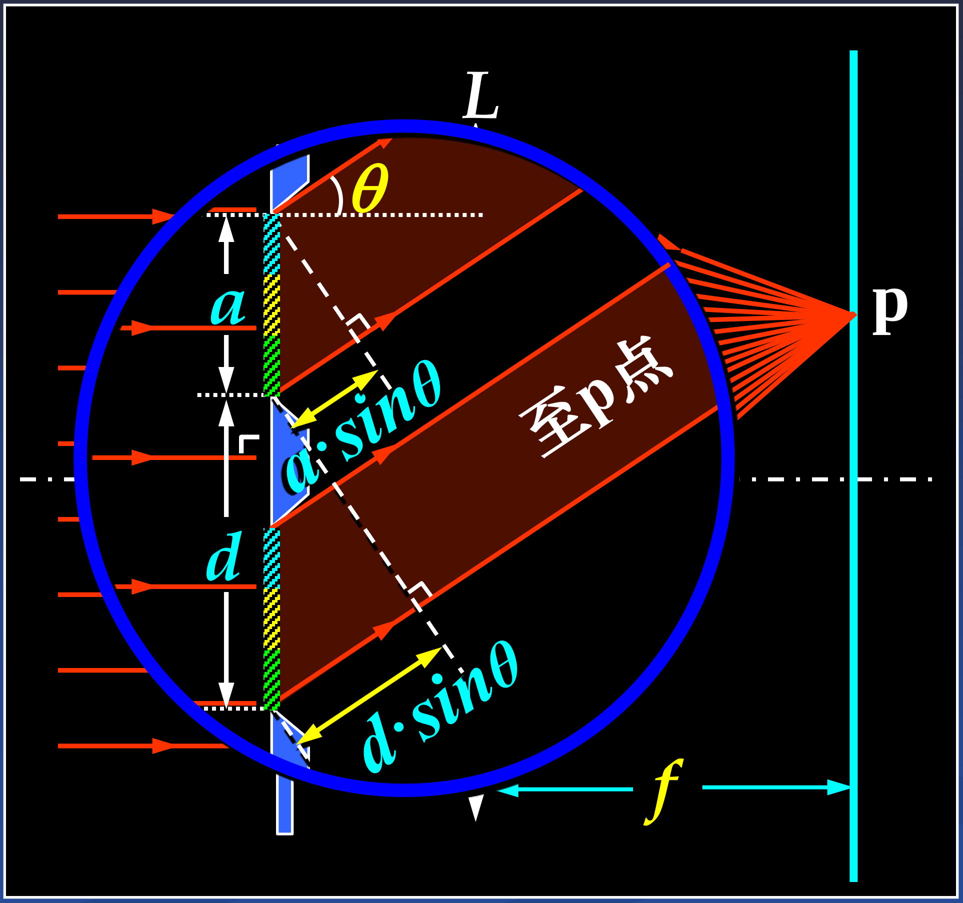
.and. $a \cdot \sin\theta \neq \pm 2k' \cdot \frac{\lambda}{2}$

其中：$k' = 1, 2, \cdots$;　$k = 0, 1, 2, \cdots$

c. 缺级现象：

若θ满足：

$$d \cdot \sin\theta = \pm k\lambda$$



b. 明纹条件：

$$d \cdot \sin\theta = \pm k\lambda$$

.and. $a \cdot \sin\theta \neq \pm 2k' \cdot \frac{\lambda}{2}$

其中：$k' = 1, 2, \cdots;\quad k = 0, 1, 2, \cdots$

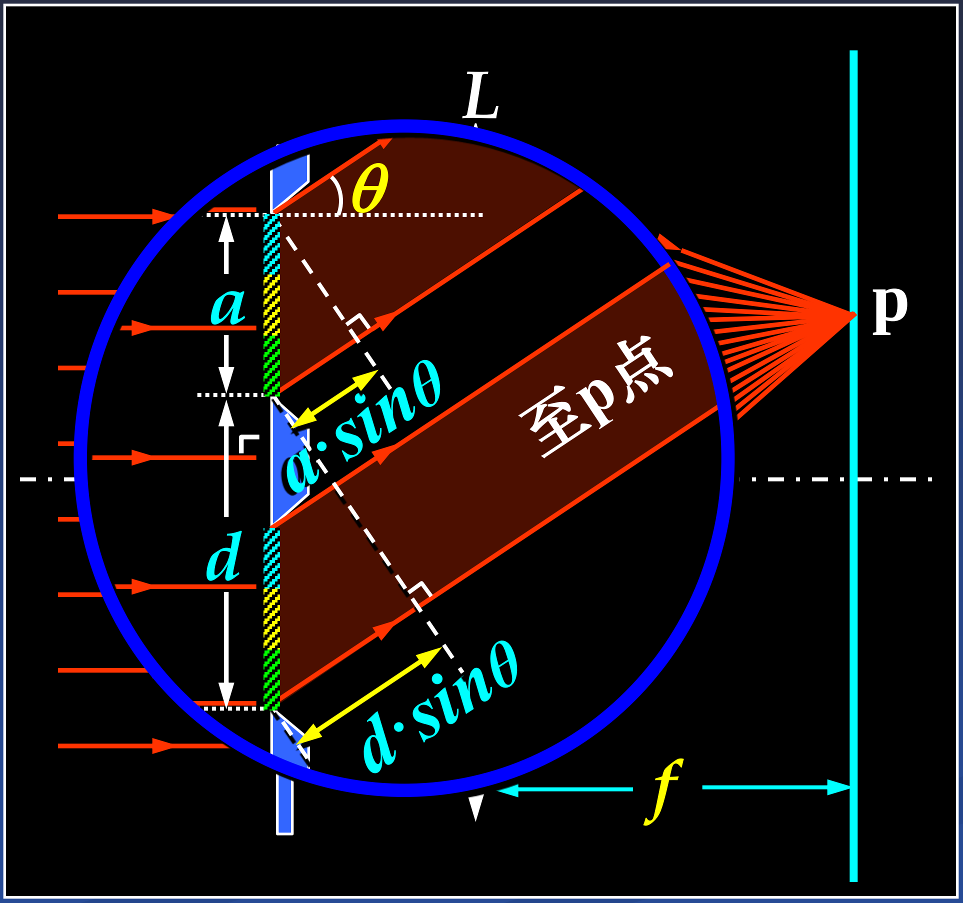
c. 缺级现象：

若θ满足：

$$\begin{cases} d \cdot \sin\theta = \pm k\lambda \\ a \cdot \sin\theta = \pm 2k' \cdot \dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$$

k 级主极大消失，称为

缺级现象。



所缺主极大的级次：$k = \pm\frac{d}{a}k' = \pm\frac{d}{a}, \pm\frac{2d}{a}, \pm\frac{3d}{a}, \cdots$

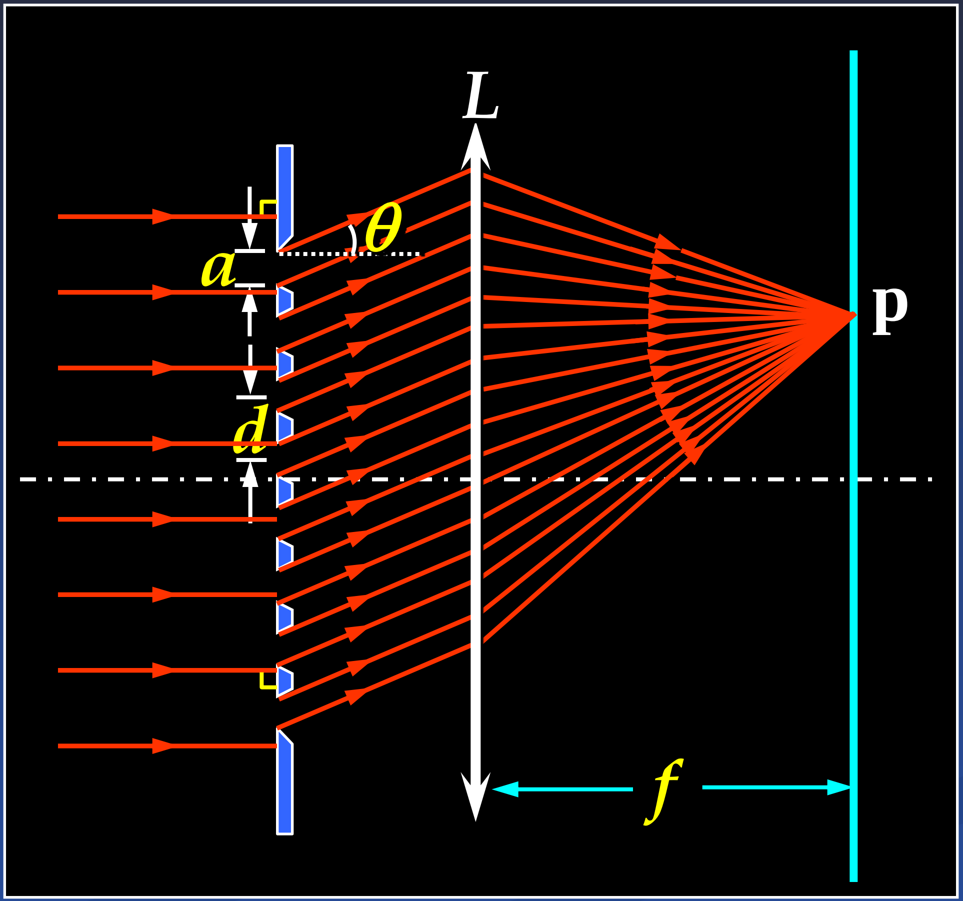
d. 光强分布：

可证p点光强为：

$$\begin{cases} d\cdot\sin\theta = \pm k\lambda \\ a\cdot\sin\theta = \pm 2k'\cdot\frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

k 级主极大消失，称为

缺级现象。



所缺主极大的级次：$k=\pm\frac{d}{a}k'=\pm\frac{d}{a},\ \pm\frac{2d}{a},\ \pm\frac{3d}{a},\ \cdots$

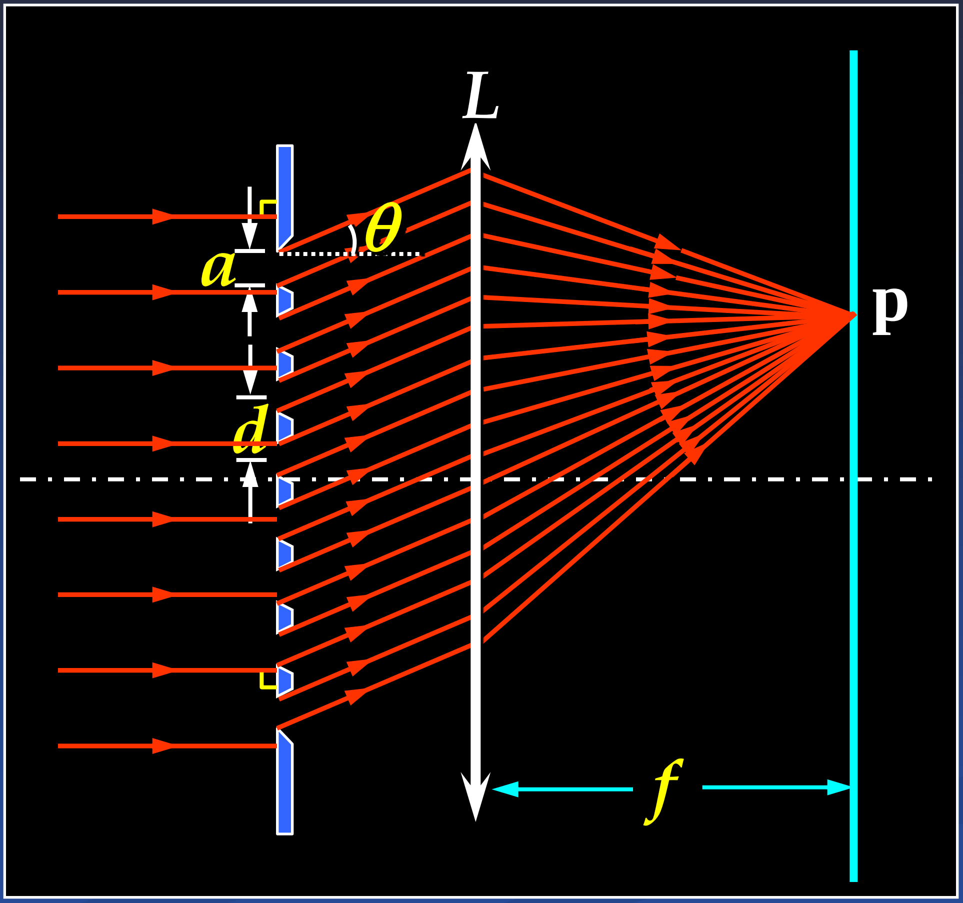
d. 光强分布：

可证p点光强为：

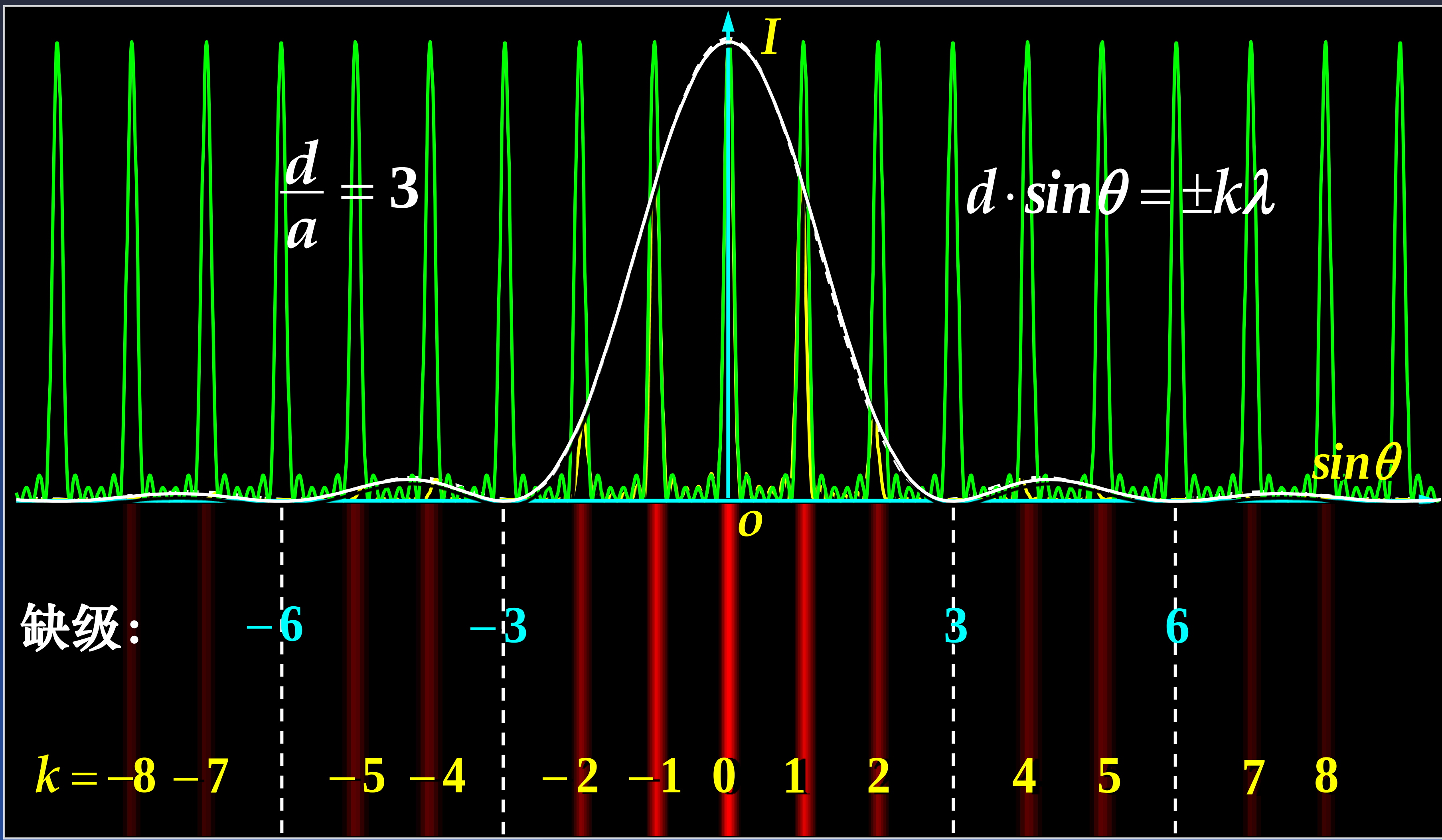
$$I_p = 4I_0\frac{\sin^2 u}{u^2}\cdot\frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2\beta}$$

$$u=\frac{\pi}{\lambda}a\cdot\sin\theta$$

$$\beta=\frac{\pi}{\lambda}d\cdot\sin\theta$$



$$I_p = 4I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta} \qquad u = \frac{\pi}{\lambda} a \cdot \sin\theta \qquad \beta = \frac{\pi}{\lambda} d \cdot \sin\theta$$



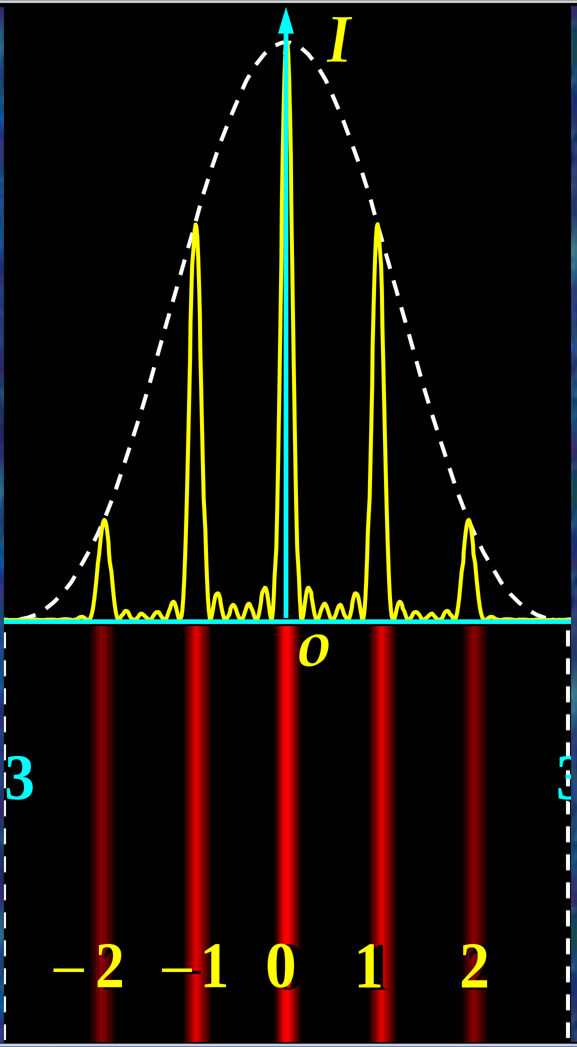
e. 中央明带内的条纹数：

若：$\dfrac{d}{a}=3$

则，**中央明带内**

共有明纹数：

$2\times(3-1)+1=5$



若：$\dfrac{d}{a}=2,\ 4$?

$2\times(2-1)+1=3$

$2\times(4-1)+1=7$

三、几点讨论

1. 单色光斜入射：

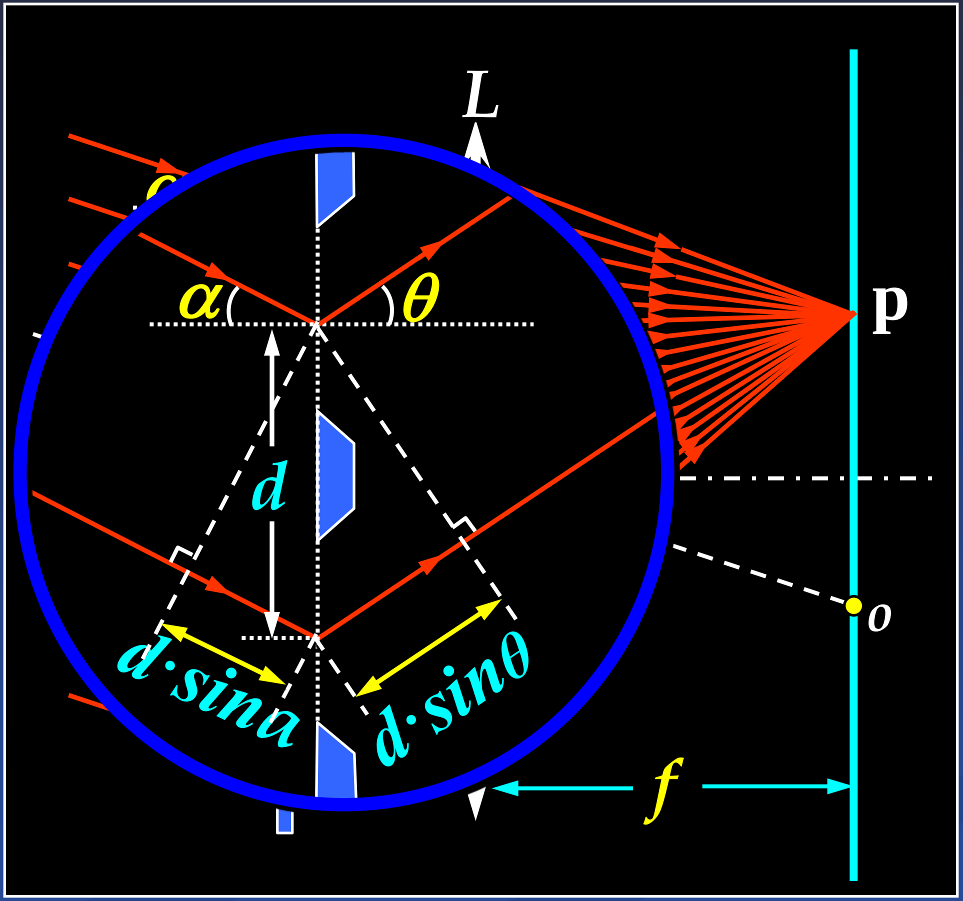
明纹条件：

$$d\cdot(\sin\alpha+\sin\theta)=\pm k\lambda$$

在光轴的上方时：

$$\alpha>0;\ \theta>0$$

否则：$\alpha<0;\ \theta<0$



例 光栅：5000条缝/cm， λ =590nm，**(1)** 不计缝宽，α= 0 º、 30 º时，分别：k_{max}=? 共有多少条？**(2)** a =1.0×10^{-6} m，则α = 0 º时共有几条明纹? 中央明带内共有几条?

解 (1) $d = 1\text{cm}/5000 = 2\times10^{-6}\ \text{m}$

$\alpha = 0^{\circ}$时： $d\cdot\sin\theta = \pm k\lambda$

$$k = \frac{d\cdot\sin\theta}{\lambda} \le \frac{d}{\lambda} \approx 3.34 \longrightarrow k_{max} = 3$$

屏上共有条纹：$2\times3+1=7$(条)

$\alpha = 30^{\circ}$时：$d\cdot(\sin30^{\circ} + \sin\theta) = \pm k\lambda$

(2) $a=1.0\times10^{-6}$ m，则$\alpha=0^{o}$时共有几条明纹? 中央明带内共有几条?

$$\pm k=\frac{d\cdot(\sin 30^{o}+\sin\theta)}{\lambda}$$

$$\theta=+90^{o}:\ k_{max+}=int[\frac{d\cdot(\sin 30^{o}+1)}{\lambda}]=5$$

$$\theta=-90^{o}:\ -k_{max-}=int[\frac{d\cdot(\sin 30^{o}-1)}{\lambda}]=-1$$

屏上共有条纹：$2\times3+1=7$(条)

$\alpha=30^{o}$时：$d\cdot(\sin 30^{o}+\sin\theta)=\pm k\lambda$

(2) $a=1.0\times10^{-6}$ m，则$\alpha=0^{\circ}$时共有几条明纹? 中央明带内共有几条?

$$\pm k=\frac{d\cdot(\sin 30^{\circ}+\sin\theta)}{\lambda}$$

$$\theta=+90^{\circ}:\ k_{max+}=int\left[\frac{d\cdot(\sin 30^{\circ}+1)}{\lambda}\right]=5$$

$$\theta=-90^{\circ}:\ -k_{max-}=int\left[\frac{d\cdot(\sin 30^{\circ}-1)}{\lambda}\right]=-1$$

屏上共有条纹：$1+5+1=7$(条)

(2) $a=1\times10^{-6}$ m ⟶ $d:a=2:1$

(2) $a = 1.0\times10^{-6}$ m，则$\alpha = 0^{\circ}$时共有几条明纹？中央明带内共有几条？

$\alpha = 0^{\circ}$时缺级： $k = \pm\frac{d}{a}k' = \pm 2k'$

$$\pm k_{max} = \pm 3$$

屏上能观察到的条纹： $\pm k = 0, \pm 1, \pm 3$

屏上共有条纹：$1+5+1=7$(条)

(2) $a = 1\times10^{-6}$ m ⟶ $d:a = 2:1$

(2) $a = 1.0\times10^{-6}$ m，则$\alpha = 0^{o}$时共有几条明纹? 中央明带内共有几条?

$\alpha = 0^{o}$时缺级：$k = \pm\frac{d}{a}k' = \pm 2k'$

$$\pm k_{max} = \pm 3$$

屏上能观察到的条纹：$\pm k = 0, \pm 1, \pm 3$

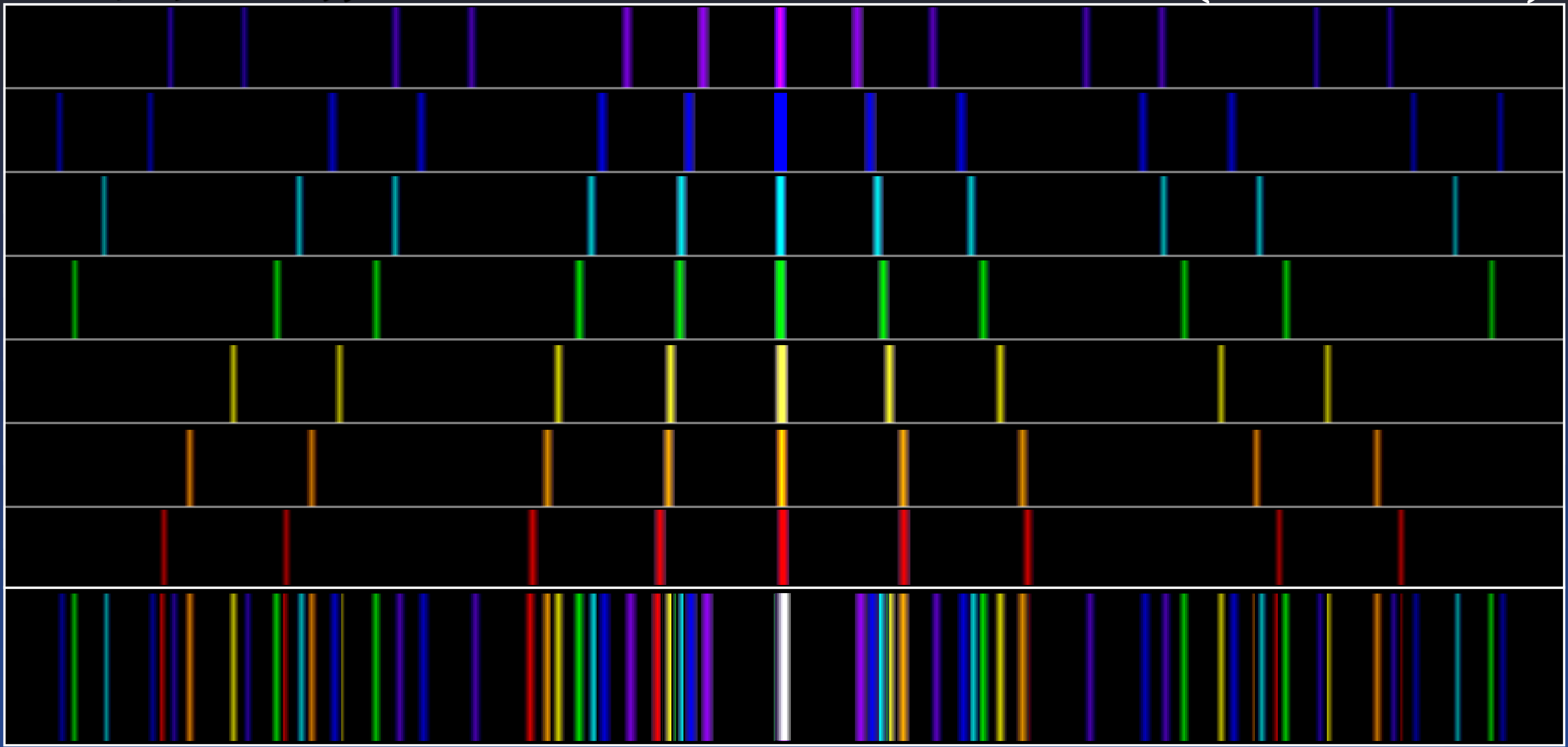
共 5 条!

中央明带内共有条纹：$2\times(2-1)+1 = 3$ (条)

(the end)

2. 白光入射：

$(d:a=3:1)$



中央明带内共有条纹： $2\times(2-1)+1=3$(条)

(the end)

2. 白光入射：

$(d:a=3:1)$

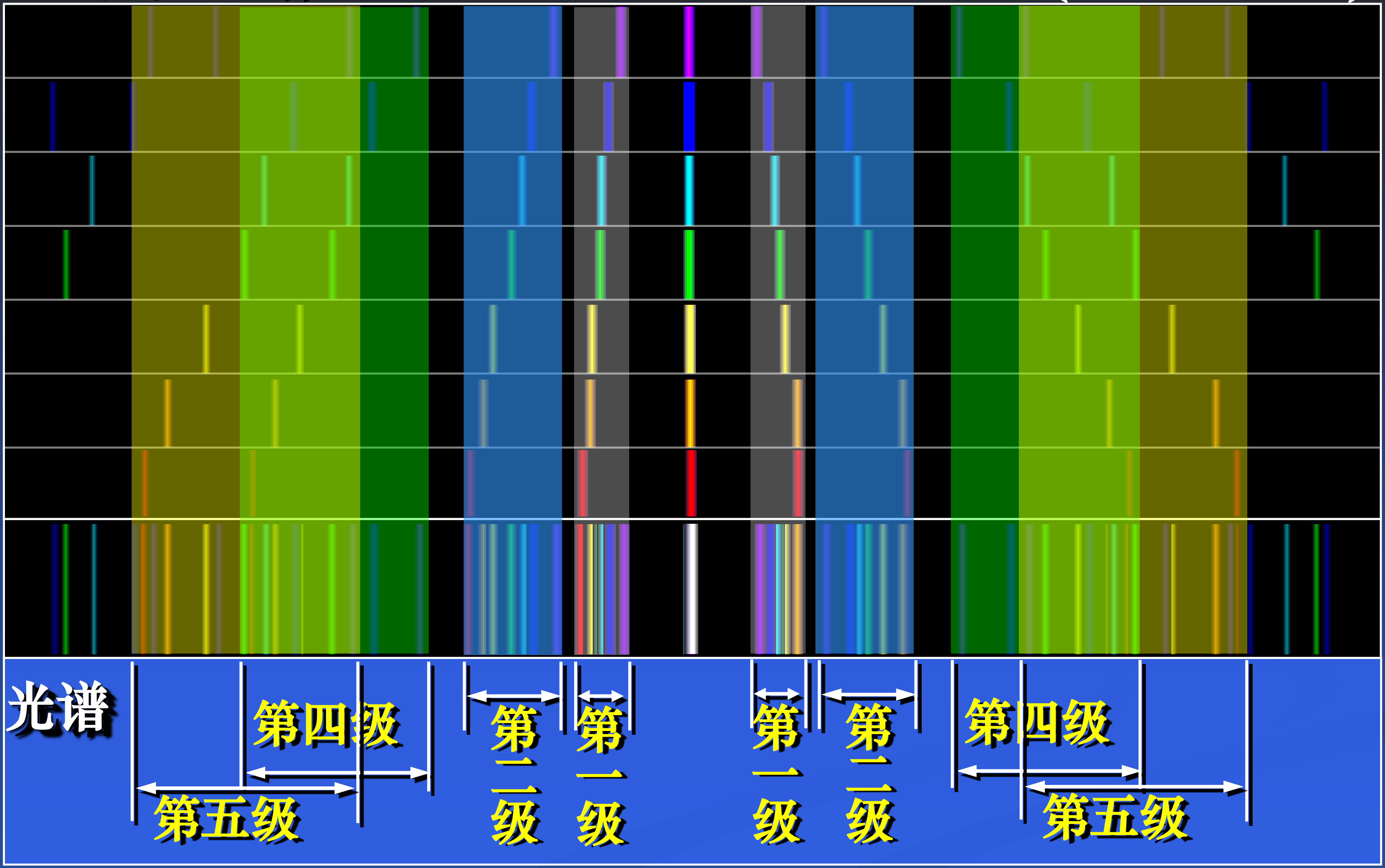


Fig. 1 白光入射时光栅的衍射光谱

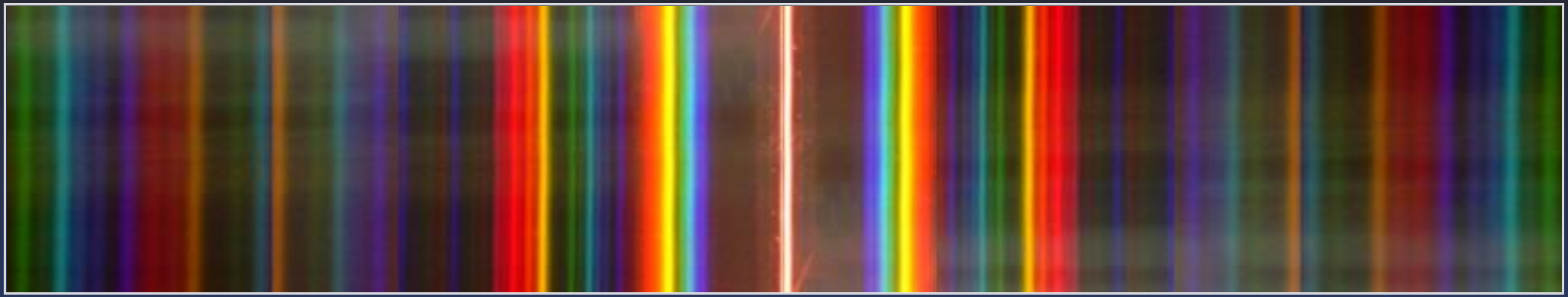


Fig. 2 光盘等效于反射型光栅 (白光下衍射光谱)

例 λ： 450nm ~ 650nm 垂直照射，光栅：5000条/cm，在透镜的焦面上第二级光谱线宽度为35.1cm，f = ?

解 $d \cdot \sin\theta = \pm k\lambda = \pm 2\lambda$

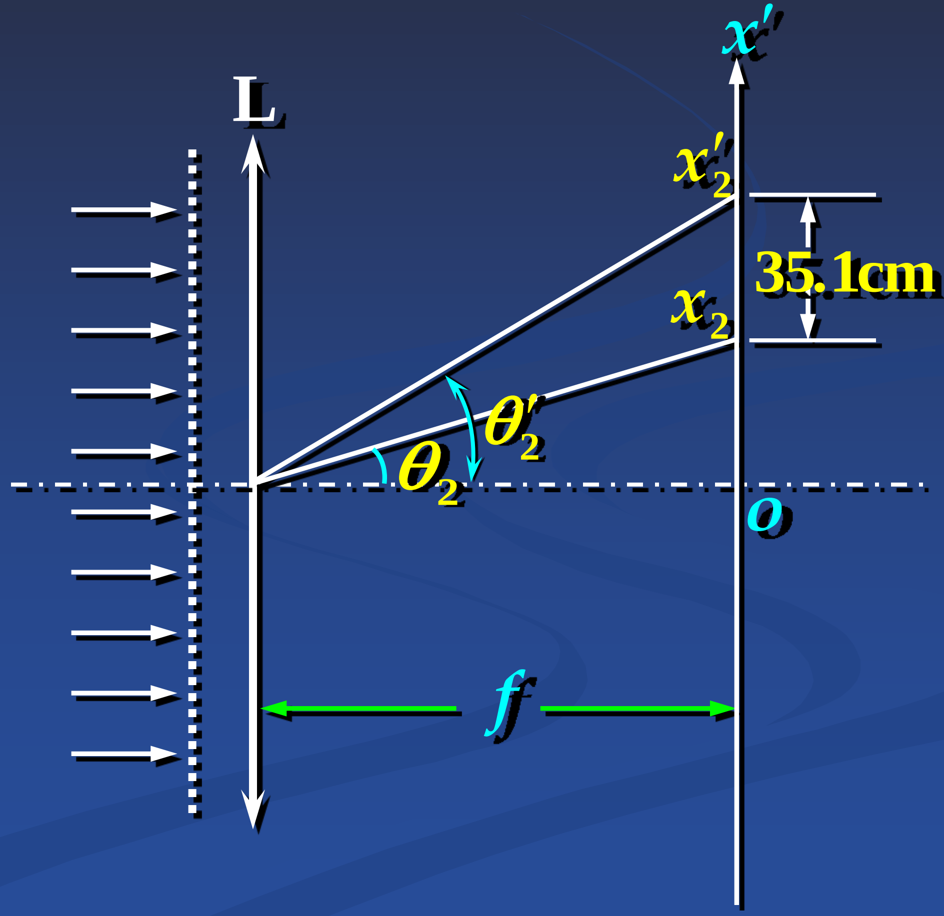
$\lambda = \lambda_1 = 450\text{nm}:$

$$\sin\theta_2 = \frac{2\lambda_1}{d} \approx 0.45$$

$$tg\theta_2 \approx 0.504$$

$\lambda = \lambda_2 = 650\text{nm}:$

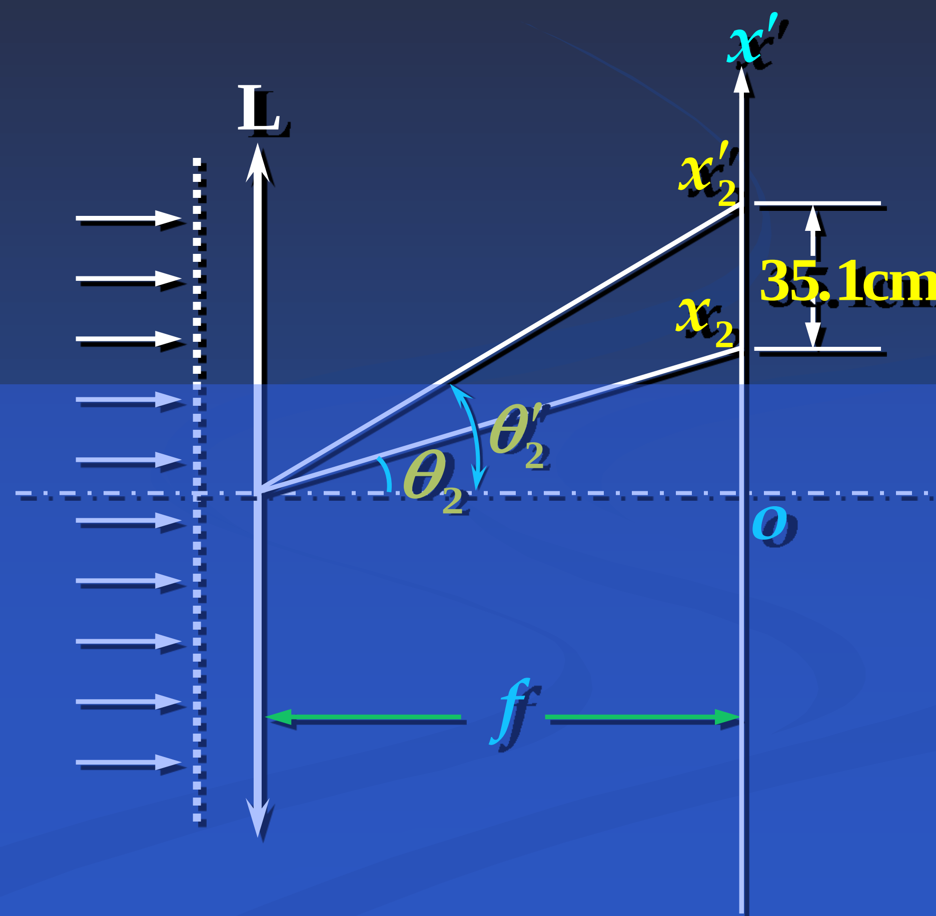
$$\sin\theta_2' = \frac{2\lambda_2}{d} \approx 0.65$$



$$tg\theta_2' \approx 0.855$$

$$x_2' - x_2 = f\cdot(tg\theta_2' - tg\theta_2) \overset{?}{\neq} f\cdot(\sin\theta_2' - \sin\theta_2)$$

$$f = \frac{x_2' - x_2}{tg\theta_2' - tg\theta_2}$$



$$tg\theta_2 \approx 0.504$$

$$\lambda = \lambda_2 = 650\text{nm}:$$

$$\sin\theta_2' = \frac{2\lambda_2}{d} \approx 0.65$$

$$tg\theta_2' \approx 0.855$$

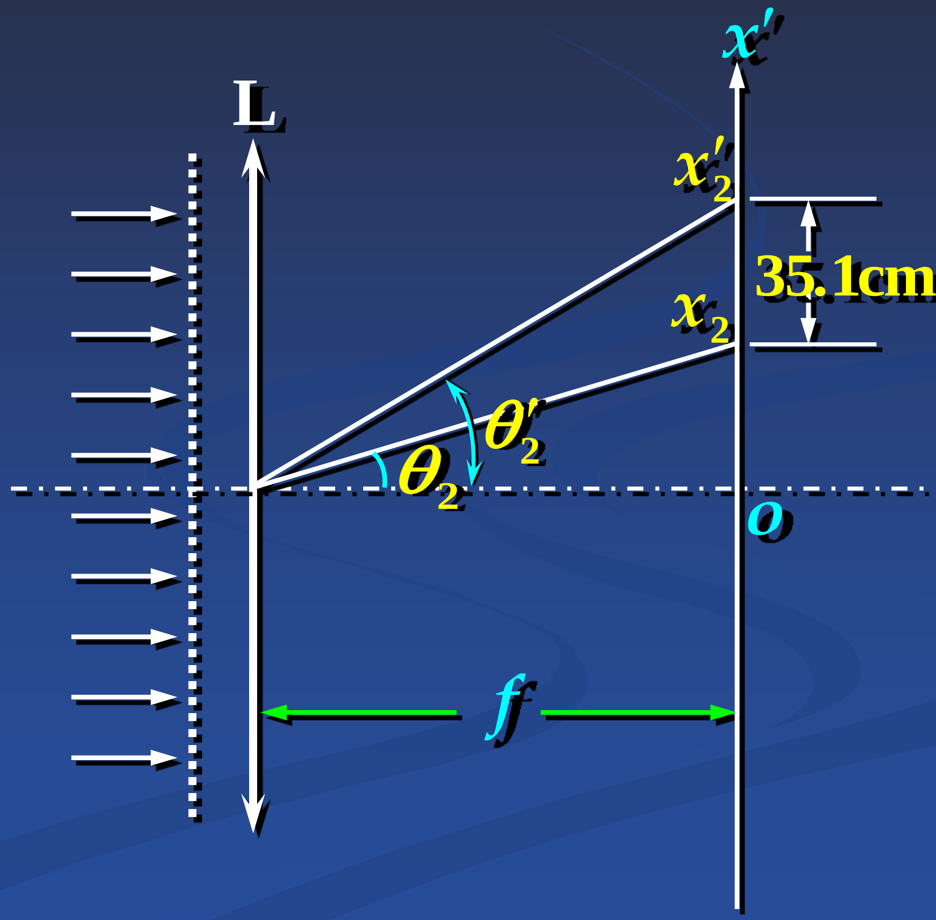
$$x_2' - x_2 = f \cdot (tg\theta_2' - tg\theta_2) \neq f \cdot (\sin\theta_2' - \sin\theta_2)$$

$$f = \frac{x_2' - x_2}{tg\theta_2' - tg\theta_2}$$

$$\approx \frac{35.1\,\text{cm}}{0.855 - 0.504}$$

$$= 1.00\,\text{m}$$

(the end)

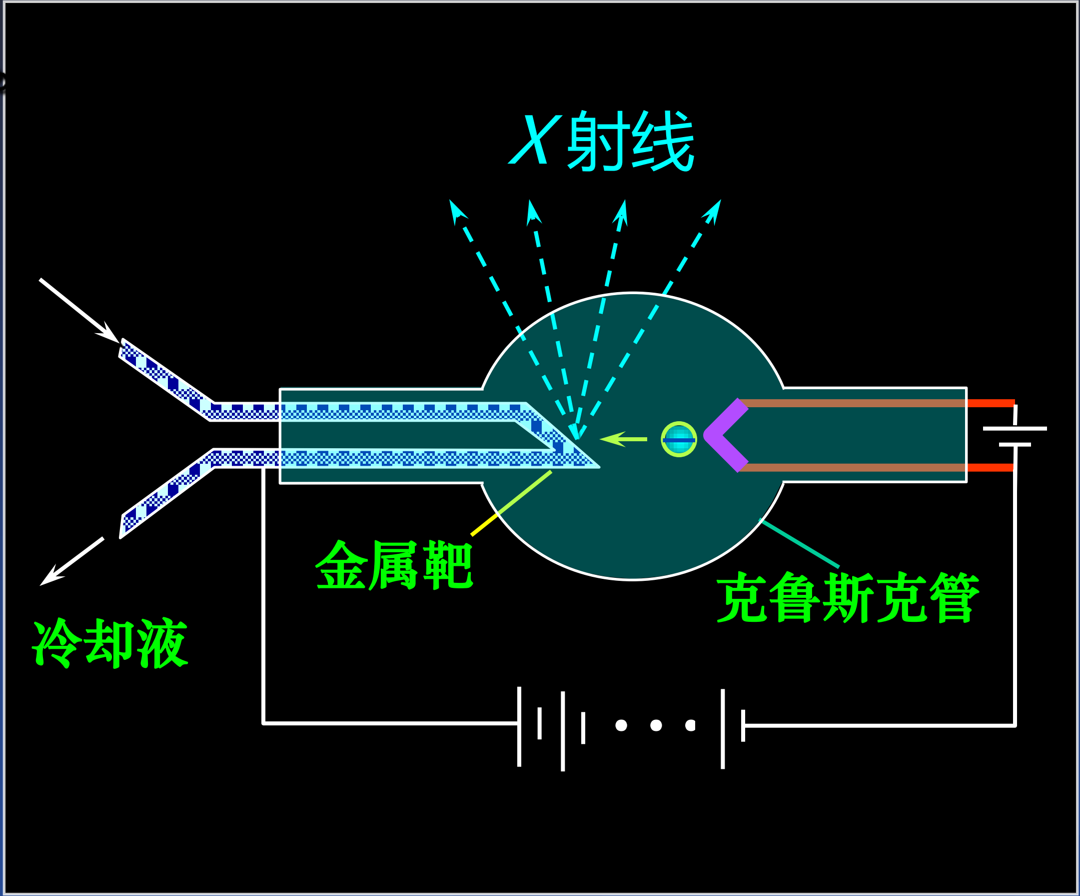


四、*X*射线的衍射

- 穿透力强，波长短。

$4\times10^{-2}\sim100\ \mathrm{nm}$

- 在电磁场中不偏转，是一种电磁波，亦会产生干涉与衍射效应。

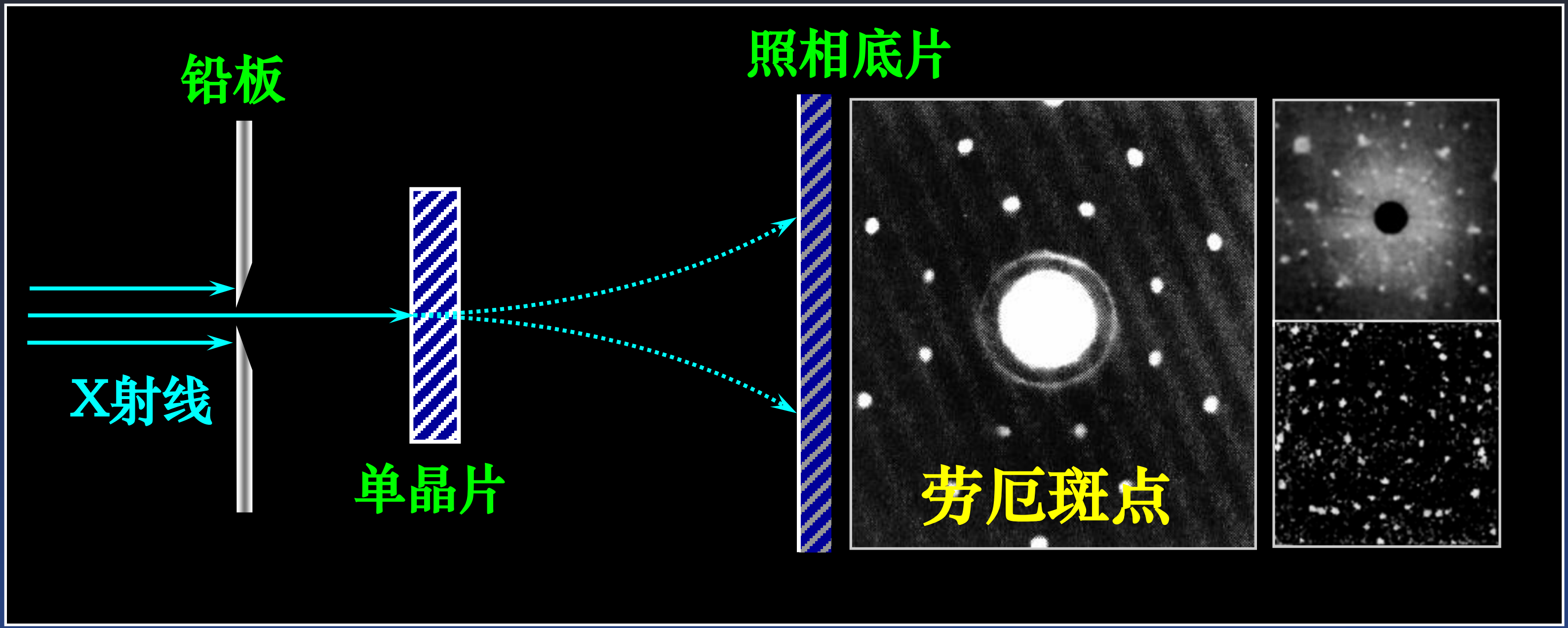


W.k.Röntgen 1845~1923

历史上第一张*X*射线照片，就是伦琴拍摄他夫人手的照片。由于*X*射线的发现具有重大的理论意义和实用价值，伦琴于1901年获得首届诺贝尔物理学奖。

X射线断层扫描仪一般称为 “CT”，它是电子计算机X射线断层扫描仪的简称。

■ X 射线衍射实验



劳厄 (Max von Laue， 1879~1960)：德国物理学家。发现了X射线的衍射现象，从而判定出X射线的本质是一种高频电磁波。1914年他因此获得诺贝尔物理学奖。

布拉格公式

d：晶面间距；θ：掠射角

反射光加强条件:

$$2d \cdot \sin\theta = k\lambda$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

---- 布拉格公式

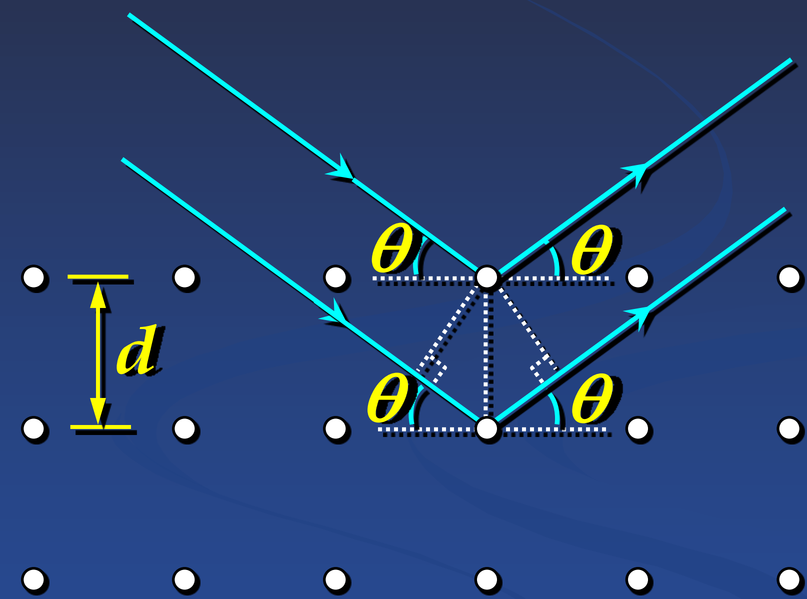
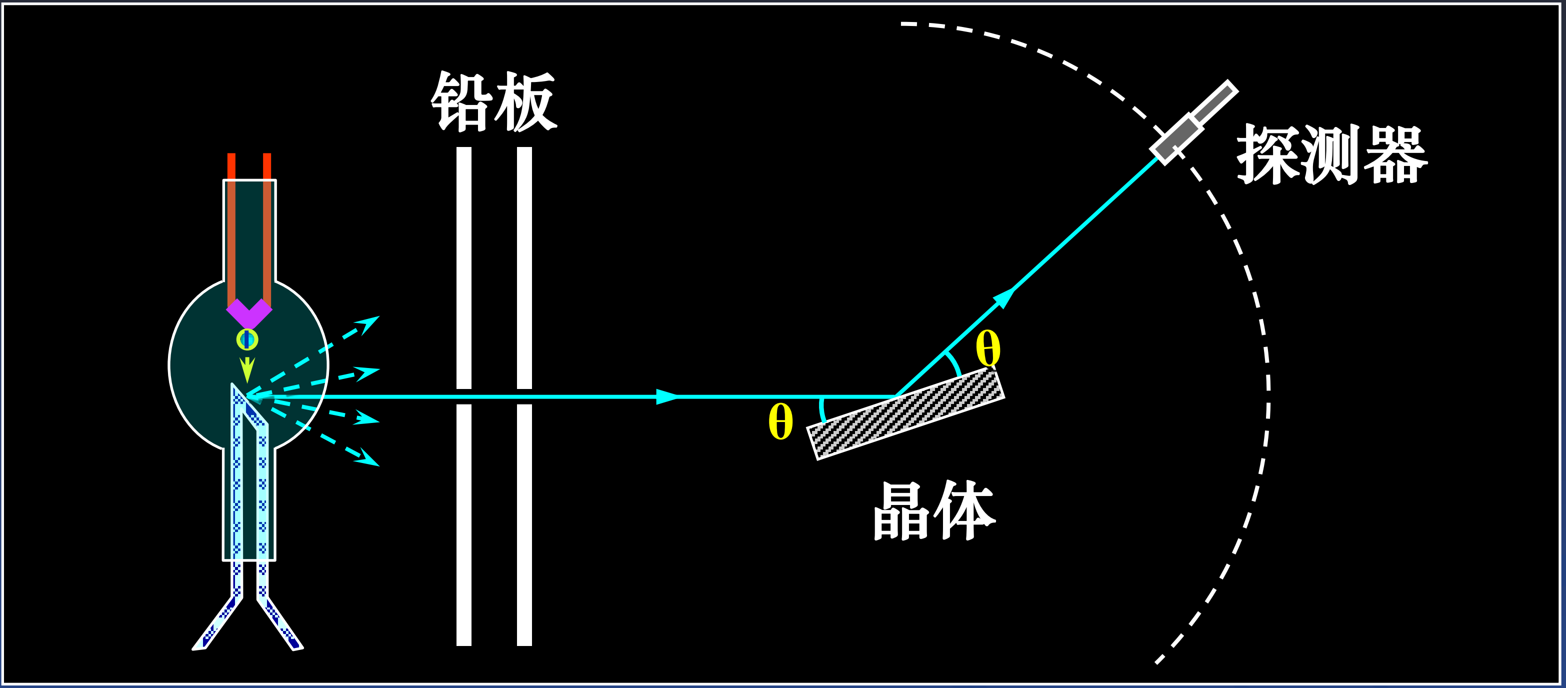
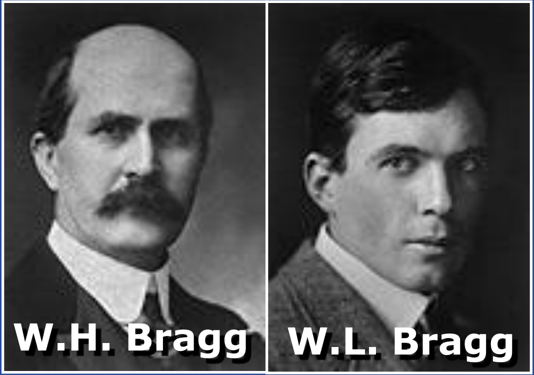


Fig. 晶体的晶格点阵

X射线衍射装置图:





布拉格父子因在用X射线研究晶体结构方面作出了巨大的贡献，于1915年共同荣获诺贝尔物理学奖。

归纳：

1. 光栅常数：$d = a + b$

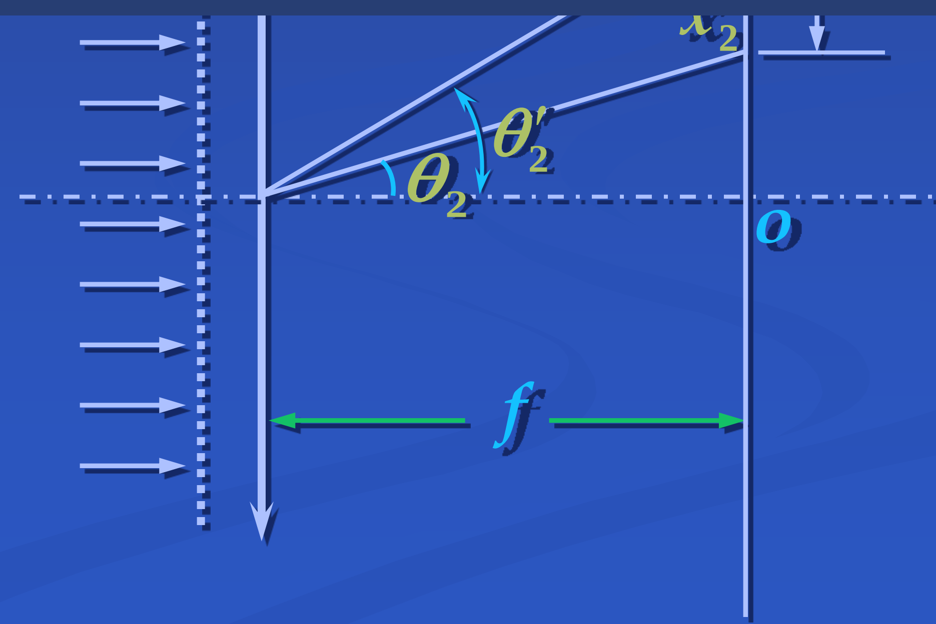
2. 光栅的衍射图样：细窄、明亮

主极大角位置：　$d \cdot \sin\theta = \pm k\lambda$ （光栅方程）

$$\approx \frac{35.1\,\text{cm}}{0.855 - 0.504}$$

$$= 1.00\,\text{m}$$

(the end)



归纳：

1. 光栅常数： $d = a + b$

2. 光栅的衍射图样：细窄、明亮

主极大角位置： $d \cdot \sin\theta = \pm k\lambda$ （光栅方程）

缺级： $k = \pm \dfrac{d}{a} k' = \pm \dfrac{d}{a}, \pm \dfrac{2d}{a}, \pm \dfrac{3d}{a}, \cdots$

中央明带内的条纹数：

3. 斜入射时的光栅方程： $d \cdot (\sin\alpha + \sin\theta) = \pm k\lambda$

4. 白光入射时的光谱：第一级光谱、第二级……

5. *X*射线的衍射

(*The end*)